

Министерство образования, науки и молодежной политики
Республики Коми
Государственное профессиональное образовательное учреждение
«Сыктывкарский политехнический техникум»

Рассмотрено на ПЦК
Протокол № _____ 20__ г.
от « ____ » _____ 20__ г.

Согласовано:
Зам. директора по УПР
« ____ » _____ 20__ г.

**Комплект
контрольно-оценочных средств
учебной дисциплины**

ЕН.01 Математика
основной профессиональной образовательной программы
по специальности СПО
190631-Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Математика: комплект контрольно-оценочных средств по
специальности среднего специального образования 190631-Техническое
обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Разработчик: Панюкова Нина Геннадьевна, преподаватель

Практическая работа №2

Предел последовательности и предел функции. Замечательные пределы.

Время на выполнение: 45 минут

Перечень объектов контроля и оценки

Наименование объектов контроля и оценки	Основные показатели оценки результата	Оценка
У1Сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.	Определения предела, предела последовательности, предела функции, теоремы о пределах, определения 1-го, 2-го замечательных пределов.	1 балл за каждое задание
З1. Основные понятия и методы математического анализа	- Формулировка определения области определения и значения функции, свойства функции.	

За верное решение работы выставляется положительная оценка – 10 баллов

За неверное решение работы выставляется положительная оценка – 0 баллов

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число a называется пределом последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$

$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$$

$$\text{Решение } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{6}{n^2} - \frac{5}{n^3} \right)}{n^3 \left(10 - \frac{8}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\text{Решение } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{n^3 \left(12 + \frac{4}{n} - \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{0}{12} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(1 + \frac{6}{n^2})}{n^2(\frac{7}{n} - \frac{8}{n^2})} = \frac{1}{0} = \infty$$

Решение

Пример 4. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})$$

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1})(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{((\sqrt{2n+8})^2 - (\sqrt{n-1})^2)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+8) - (n-1)}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8-n+1}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{(\sqrt{2n+8} + \sqrt{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 + \frac{9}{n})}{n(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{9}{n})}{(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{9}{n}}{(\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{8}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}})} = \frac{1}{0} = \infty \end{aligned}$$

Число A называют **пределом функции** $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ (и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$),

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε , такое, что для всех

$x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теоремы о пределах.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ ($c = \text{const}$).

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$, то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Второй замечательный предел (число $e = 2,718...$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e \text{ или } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Пример 5. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x}$$

$$\text{Решение} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 8x \cdot 8}{6 \cdot 8x} = \frac{5 \cdot 8}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$$

Пример 6. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x}$$

$$\text{Решение} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1+5x)}{5x} = 5$$

Пример 7. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}}$$

$$\text{Решение} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{5x} \cdot 5x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x}} = e^{\frac{5}{3}}$$

Пример 8. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^x$$

Решение

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1 + 3}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3}} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3}} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{3}} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 + 1}} = e^0 = 1\end{aligned}$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, нужно предельное

значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x \rightarrow x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$.

При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \rightarrow 0; \quad \frac{c}{0} \rightarrow \infty; \quad \frac{\infty}{c} \rightarrow \infty; \quad c \cdot \infty \rightarrow \infty; \quad c \cdot 0 \rightarrow 0; \quad a^\infty \rightarrow 0, \text{ если } 0 < a < 1; \quad a^\infty \rightarrow \infty, \text{ если } a > 1.$$

Случай, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right); \left(\frac{0}{0} \right); (0 \cdot \infty); (\infty - \infty); (1^\infty); (\infty^0); (0^0).$$

Пример 9. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cdot 1^3 + 15}{10 \cdot 1^2 - 4} = \frac{2 + 15}{10 - 4} = \frac{17}{6}$

Пример 10. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

Решение $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4+4)}{(4-1)} = \frac{8}{3}$

Пример 11. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

Содержание практической работы
Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$$\begin{aligned}1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+5} & \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-2n}{n+6} & \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+3}{1+2n} \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+16}{9n} & \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2} & \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2}{(n-1)^2 - (n+1)^2} \\ 7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - 1}{n+2} & \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 16n} & \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n-7} - \sqrt{n+2})\end{aligned}$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 - 3x}{x^3 - 3x^2 + x} & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x} & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)}{x^2} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x-3})}{\sqrt{x-2}} & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x} - 1}{x+2} & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 15x^2 + x}{18x^2 + 15x} & \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x-7} - \sqrt{x+2})}{x-2}\end{aligned}$$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$\begin{aligned}1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2} \right)^{x^2+1} & \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x & \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 10x^2)^{\frac{1}{x^3}} & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x} & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 4x} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 3x}{\lg x} & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-2x)}{4 \arctg 3x} & \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 7x}{\sin x \cdot x^2}\end{aligned}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светлого цвета.
2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?
3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?
4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынута по одному шару.
5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,7, в третье – 0,85. Найти вероятность следующих событий:
 - а) только одно отделение получит газеты вовремя;
 - б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.
6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?
7. В партии из 25 деталей находится 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.
8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.
9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.
10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?
2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру $=0,5$, ко второму $=0,6$. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером $=0,94$, а вторым $=0,92$. Годная деталь при

проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время T равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время T прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету $=0,3$. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колпачек $=0,3$. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колпачке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p . Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4. Найти дисперсию случайной величины X , которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.